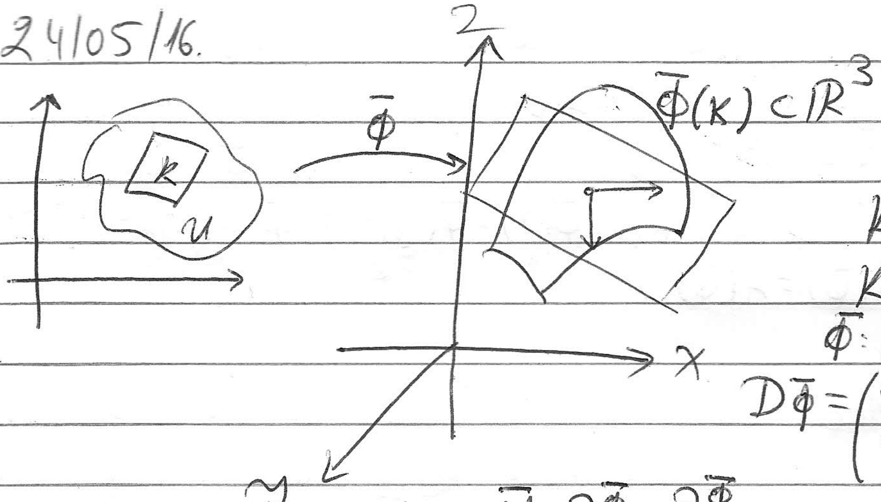
24/05/16.



$K\subset\mathbb{R}^2$, συμπαγές κ' J-μετρ.
$K\subset U\subset\mathbb{R}^2$
$\bar\Phi: K\to\mathbb{R}^3$, $\bar\Phi: C^1$

$$D\bar\Phi = \underbrace{\left(\frac{\partial\bar\Phi}{\partial u}\ \ \frac{\partial\bar\Phi}{\partial v}\right)}_{\text{εφ/να δ/τα που παράγουν το εφ/νο επίπεδο.}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar N = \frac{\partial\bar\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial v}$$

κάθετο δ/α στο εφ/νο επίπεδο.

εμβαδόν της $\bar\Phi:K\to\mathbb{R}^3$: $A(\bar\Phi)=\int_K \|\bar N(u,v)\|\,d(u,v)$

επιφ. ολ/μα πραγμ. συν/σης $f:\bar\Phi(K)\to\mathbb{R}$ συνεχής

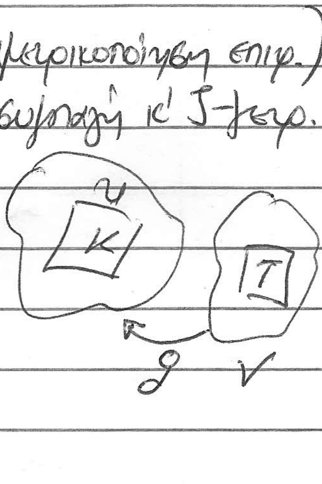
$$\int_{\bar\Phi} f\,d\sigma := \int_K f(\bar\Phi(u,v))\,\|\bar N(u,v)\|\,d(u,v)$$

επιφ. ολ/μα δ/κού πεδίου: $\bar f:\bar\Phi(K)\to\mathbb{R}^3$

$$\int_{\bar\Phi}\bar f\cdot\bar n\,d\sigma := \int_K \bar f(\bar\Phi(u,v))\cdot\bar N(u,v)\,d(u,v)$$

Παραμετρικός Μετασχηματισμός (αναπαραμετροποίηση επιφ.)

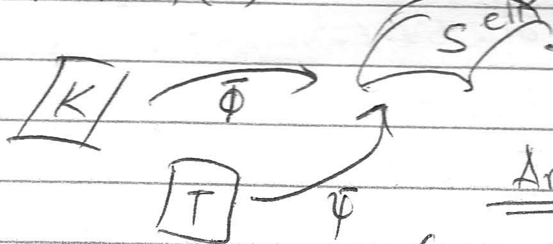
Ορισμός: Έστω $U,V\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτά, $K\subset U$, $T\subset V$ συμπαγή κ' J-μετρ. και $g:V\to U$ 1-1, C^1 με $\det D\bar g(s,t)\neq 0$, $\forall (s,t)\in V$ και $g(T)=K$.
Η $\bar g$ αυτή ονομάζεται (επιτρεπτός) παραμετρικός μετασχηματισμός από το T στο K.
($\bar g: V\to U$, 1-1, C^1, ονομάζεται διαφορομορφισμός)
$\det D\bar g(s,t)\neq 0$



Αν $\det D\bar g(s,t)>0$, $\forall(s,t)\in T \Rightarrow \bar g$ διατηρεί τον προσανατολισμό.
—//— <0 —//— αντιστρέφει —//—

Πρόταση: Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^3$, $K \subset U$, $T \subset V$, συμπαγή και J-μετρ., $\bar{g}: V \to U$ ένας παραμ. μετασχ. και έστω $\bar{\Phi}: K \to \mathbb{R}^3$. Τότε η επιφάνεια $\bar{\Psi} = \bar{\Phi} \circ \bar{g}$ με παραμ. πεδίο T και εικόνα: $\bar{\Psi}(T) = \bar{\Phi}(\underbrace{\bar{g}(T)}_{K}) = \bar{\Phi}(K) \subset \mathbb{R}^3 : T \to \mathbb{R}^3$ έχει εμβαδό: $A(\bar{\Psi}) = A(\bar{\Phi})$.

Παρατήρηση: Αφού το εμβαδόν μιας επιφ. δεν αλλάζει αν αναπαραμετρικοποιήσω την επιφάνεια μπορούμε να μιλάμε για το εμβαδόν της επιφάνειας: $S = \bar{\Phi}(K) = \bar{\Psi}(T)$



$\in \mathbb{R}^3 \Rightarrow S = \bar{\Phi}(K) = \bar{\Psi}(T)$

Αποδ: $A(\bar{\Psi}) = \int_T \underline{\left\| \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \right\|} d(s,t) =$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v} \det D\bar{g}(s,t)$$

$$= \int_T \left\| \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(g(s,t)) \right\| \cdot |\det D\bar{g}(s,t)| \, d(s,t) =$$

$$= \int_{\bar{g}(T)} \left\| \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v) \right\| d(u,v) = A(\bar{\Phi}).$$

$\longleftrightarrow$

$$\int_K \bar{F}(\bar{\Phi}(u,v)) \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v} \right)(u,v)}_{} d(u,v)$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial s}(g(s,t)) \cdot \det D\bar{g}(s,t) =$$

$$\overset{\text{αν } \det > 0}{\underset{\text{KAM}}{=}} \int_T \bar{F}(\bar{\Psi}(s,t)) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}(s,t) \, d(s,t)$$

$$\overset{\text{KAM}}{\underset{\text{αν } \det < 0}{=}} - \int_T \ldots$$

Παρατήρηση: Όπως στο εμβαδόν επιφ. με το ίδιο επιχείρημα αποδεικνύουμε ότι $S := \bar{\Phi}(K) = \bar{\Psi}(T)$, όπου $\bar{\Psi} = \bar{\Phi}\circ\bar{g}$ με $\bar{g}$ επιτρεπτό παραμ. μετασχ. $\bar{g}(T) = K$ δηλ. μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_S f\,d\sigma := \underbrace{\int_{\bar{\Phi}} f\,d\sigma = \int_{\bar{\Psi}} f\,d\sigma}$$

το επιφ. αλλά $f: S \to \mathbb{R}$ δεν αλλάζει

$$= \int_K f(\bar{\Phi}(u,v)) \left\| \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

Πρόταση: Έστω U, V ανοικτά $\subset \mathbb{R}^2$, $K \subset U$, $T \subset V$ συμπ. J-μετρ. $\bar{\Phi}$ και $\bar{\Psi} = \bar{\Phi}\circ\bar{g}$ δύο παραμετρικοποιήσεις της $S = \bar{\Phi}(K) = \bar{\Psi}(T)$ (όπου $\bar{g}: V \to U$ παρ. μετασχ. με $\bar{g}(T) = K$) και $f: S \to \mathbb{R}^3$ συνεχής. Τότε:

$$\int_{\bar{\Psi}} \bar{f}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \int_{\bar{\Phi}} \bar{f}\cdot\bar{n}\,d\sigma \quad (\text{αν } \det D\bar{g}(s,t) > 0)$$

$$\text{και } \int_{\bar{\Psi}} \bar{f}\cdot\bar{n}\,d\sigma = -\int_{\bar{\Phi}} \bar{f}\cdot\bar{n}\,d\sigma \quad (\text{αν } \det D\bar{g}(s,t) < 0).$$

Π.χ.: Έστω $\bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u\cdot v \end{pmatrix}$, $(u,v) \in K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \le 1\}$

$$\bar{f}(x,y,z) = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad \int_{\bar{\Phi}} \bar{f}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \int_K \underbrace{f(\bar{\Phi}(u,v))}\cdot \bar{N}(u,v)\,d(u,v)$$

$$\bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$$

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } \int_K \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \int_K (-uv)\,d(u,v) = -\int_K uv\,d(u,v) =$$

$$= -\int_0^1\int_0^{2\pi} \overbrace{r\cos\varphi}^{u} \cdot \overbrace{r\sin\varphi}^{v}\,d\varphi\,dr = -\left(\int_0^1 r^3 dr\right)\left(\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} 2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}_{\sin(2\varphi)\ =0}\right)$$

Παράδειγμα (παρ. μετ. κ' προσανατολισμού)

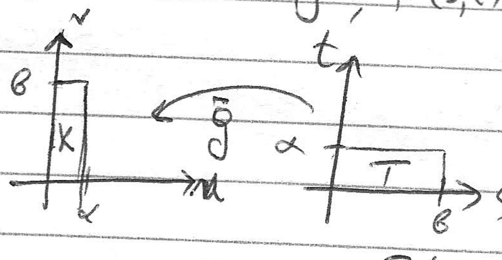
$$\bar\Phi(u,v)=\begin{pmatrix}u\\v\\f(u,v)\end{pmatrix},\quad \bar g(s,t)=\begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix}\ \forall (s,t)\in T \to \begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{D\bar g}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\bar g(s,t)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det D\bar g(s,t)=-1$$

$\bar g(T)=K=[0,\alpha]\times[0,\beta]$, $T=[0,\beta]\times[0,\alpha]$.

Έστω $\bar\Psi=\bar\Phi\circ\bar g$, $\bar\Psi(s,t)=\bar\Phi(\bar g(s,t))=\bar\Phi(t,s)$, $(s,t)\in[0,\beta]\times[0,\alpha]$

$((u,v)=)(t,s)\in K=\bar g(T)=[0,\alpha]\times[0,\beta]$



$$\Rightarrow \bar\Phi(u,v)=\begin{pmatrix}u\\v\\f(u,v)\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar N(u,v)=\begin{pmatrix}-\partial\bar\Phi/\partial u\\-\partial\bar\Phi/\partial v\\1\end{pmatrix}=\frac{\partial\bar\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial v}$$

Επίσης $\bar\Psi(v,u)=\bar\Phi(u,v)$

αφού $\bar\Psi(s,t)=\bar\Phi(t,s)$

$$\Rightarrow \frac{\partial\bar\Psi}{\partial s}\times\frac{\partial\bar\Psi}{\partial t}=-\frac{\partial\bar\Phi}{\partial t}\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial s}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial t}\\\frac{\partial f}{\partial s}\\-1\end{pmatrix}$$ ← αλλάζει ο προσανατολισμός.

Π.χ. Έστω το ελλειπτικό παραβολοειδές $\bar\Phi(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\x^2+y^2\end{pmatrix}$,
$(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le R^2\}=K$

Υπολ. το εμβαδόν της επιφάνειας $S=\bar\Phi(K)$

Λύση: $A(S)=A(\bar\Phi)=\int_K\left\|\frac{\partial\bar\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial y}\right\|d(x,y)=\int_K\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\2x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2y\end{pmatrix}\right\|d(x,y)=$

$$=\int_K\left\|\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\1\end{pmatrix}\right\|d(x,y)=\int_K\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,d(x,y)=$$

$$=\int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4\underbrace{r^2}_{y}}\cdot r\,d\varphi\,dr=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{R^2}\sqrt{1+4y}\,dy=$$

$$=\pi\frac{2}{3}(1+4y)^{3/2}\Big|_{y=0}^{R^2}=\frac{2\pi}{3}\left[(1+4R^2)^{3/2}-1\right]$$

Άσκηση: Υπολ. το ολ/μα της $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=(x^2+y^2)z$ πάνω απ' το άνω ημισφαίριο S ακτίνας $R>0$ κέντρου $(0,0,0)$.

Λύση: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=R^2 \wedge z>0\}$, $\bar\Phi(K)=S$

$\cancel{\bar\Phi(u,v)=(\quad)}$

$$\int_S f\,d\sigma = \int_{\bar\Phi} f\,d\sigma = \int_K f(\bar\Phi(u,v))\,\|\bar N(u,v)\|\,d(u,v)$$

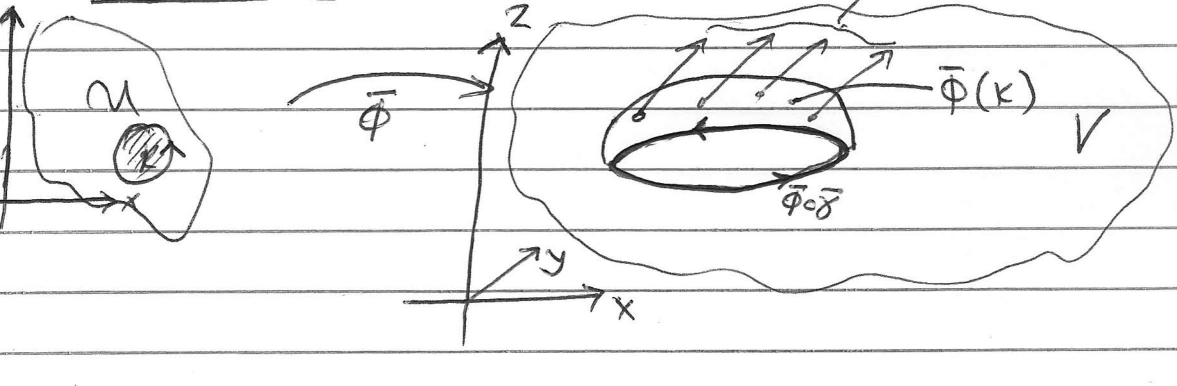
$$\bar\Phi(\theta,\varphi)=R\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix},\quad (\theta,\varphi)\in K=[0,\tfrac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]$$

$\|N(u,v)\|=R^2\sin\theta$ (απ' έξω), $f(\bar\Phi(\theta,\varphi))=R^3\sin^2\theta\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_S f\,d\sigma = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} R^5\underbrace{\sin^3\theta}_{s^3}\cos\theta\,d\varphi\,d\theta \underset{s=\sin\theta}{=} R^5\cdot 2\pi\cdot\int_0^1 s^3\,ds = \frac{\pi R^5}{2}$$

Θεώρημα Stokes: $U\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\bar\Phi:U\to\mathbb{R}^3$ C^2 επιφάνεια με παραμετρικό πεδίο $K\subset U$ ένα C^1-κανονικό χωρίο με θετικά προσανατολισμένο $\partial K=\bar\gamma([a,b])$, $\bar\gamma$ κατά τμήματα C^1 και $V\subset\mathbb{R}^3$ ανοικτό με $\bar\Phi(K)\subset V$ και $\bar f:V\to\mathbb{R}^3$ C^1. Ισχύει:

$$\boxed{\int_{\bar\Phi}\nabla\times\bar f\cdot\bar n\,d\sigma = \int_{\bar\Phi\circ\bar\gamma}\bar f\cdot d(x,y,z)},\quad \bar\nabla\times\bar f=\begin{vmatrix}\bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$



(Ασκ 168)